

Minimalité des courbes sous-canoniques

0. Introduction.

Soient \mathbf{P}^3 l'espace projectif de dimension 3 sur un corps k algébriquement clos et $R = k[X, Y, Z, T]$ l'anneau de polynômes associé. Il y a des liens forts entre les faisceaux cohérents (ou les fibrés) sur \mathbf{P}^3 , les R -modules gradués de longueur finie et les courbes localement Cohen-Macaulay de \mathbf{P}^3 . Rappelons les propriétés suivantes :

L'équivalence stable est définie sur l'ensemble des fibrés :

Définition 0.1. Deux fibrés \mathcal{F} et \mathcal{F}' sur \mathbf{P}^3 sont dits *stablement isomorphes* s'il existe des fibrés dissociés (c'est-à-dire sommes directes de faisceaux inversibles) \mathcal{L} et \mathcal{L}' et un isomorphisme $\mathcal{F} \oplus \mathcal{L} \simeq \mathcal{F}' \oplus \mathcal{L}'$.

Dans [HMDP], nous avons défini sur l'ensemble des faisceaux cohérents sur \mathbf{P}^3 la relation d'équivalence de pseudo-isomorphisme :

Définition 0.2. Soient \mathcal{N} et \mathcal{N}' des faisceaux cohérents sur \mathbf{P}^3 et soit f un morphisme de \mathcal{N} dans \mathcal{N}' . On dit que f est un *pseudo-isomorphisme* (en abrégé un *psi*) s'il induit :

- 0) un isomorphisme $H^0\mathcal{N}(n) \rightarrow H^0\mathcal{N}'(n)$ pour tout $n \ll 0$,
- 1) un isomorphisme $H_*^1\mathcal{N} \rightarrow H_*^1\mathcal{N}'$ et
- 2) une injection $H_*^2\mathcal{N} \rightarrow H_*^2\mathcal{N}'$.

Deux faisceaux cohérents seront dits *pseudo-isomorphes* s'il existe une chaîne de *psi* qui les joint.

C'est une extension de l'équivalence stable au sens suivant :

Proposition 0.3. L'application canonique de l'ensemble *Stab* des classes d'isomorphisme stable de fibrés \mathcal{F} de \mathbf{P}^3 vérifiant $H_*^2\mathcal{F} = 0$ dans l'ensemble *Psi* des classes de pseudo-isomorphisme de faisceaux cohérents de dimension projective ≤ 1 est une bijection.

Démonstration. L'injectivité est une conséquence de [HMDP]2.11 et 2.8, la surjectivité de [HMDP]2.10.

Le lien entre les fibrés et les R -modules gradués est le suivant :

Proposition 0.4. (Horrocks, cf. [Ho]). Soit \mathcal{M}_f l'ensemble des classes d'isomorphisme de R -modules gradués de longueur finie. L'application qui à un tel module associe le faisceau associé à son deuxième module de syzygies induit une bijection de \mathcal{M}_f dans *Stab*, la bijection réciproque étant induite par l'application qui envoie un fibré \mathcal{F} sur le module $H_*^1\mathcal{F}$.

On en déduit que l'application qui envoie un faisceau \mathcal{N} de dimension projective ≤ 1 sur le module $H_*^1\mathcal{N}$ induit une bijection de *Psi* sur \mathcal{M}_f .

Passons maintenant aux courbes :

Proposition 0.5. (Rao, cf. [R]). Soit $\mathcal{B}il$ l'ensemble des classes de biliaison de courbes (localement Cohen-Macaulay) de \mathbf{P}^3 . L'application qui à une courbe C associe son module de Rao $H_*^1 \mathcal{J}_C$ induit une bijection de $\mathcal{B}il$ sur le quotient de \mathcal{M}_f par l'action de décalage des degrés.

Corollaire 0.6. L'application qui à une courbe C associe son faisceau d'idéaux \mathcal{J}_C induit une bijection de $\mathcal{B}il$ sur le quotient de $\mathcal{P}si$ par l'action de tensorisation par une puissance du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$.

Il y a deux manières particulières de construire la bijection réciproque ; en effet dans chaque classe de $\mathcal{P}si$, il y a des fibrés d'après 0.3, et des faisceaux réflexifs de rang 2 (cf. [MDP2]) :

- soit \mathcal{F} un fibré ; il existe un faisceau dissocié \mathcal{P} , un entier h , une courbe C et une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_C(h) \rightarrow 0$. On associe à la classe de \mathcal{F} la classe de biliaison de C ;

- soit \mathcal{N} un faisceau réflexif de rang 2 ; on lui associe la classe de biliaison d'une courbe obtenue comme schéma des zéros d'une section non nulle de $\mathcal{N}(n)$ pour un entier n bien choisi (en particulier si $H^0 \mathcal{N}(n-1) = 0$ et $H^0 \mathcal{N}(n) \neq 0$, toute section non nulle de $\mathcal{N}(n)$ convient).

Dans chaque classe de biliaison, il y a des **courbes minimales**, qui réalisent le plus petit décalage [cf. Mi], et qui permettent de décrire toutes les courbes de la classe (cf. [MDP1] V, [BBM]).

Dans chaque classe de $\mathcal{P}si$, il y a, parmi les faisceaux réflexifs de rang 2, des **faisceaux réflexifs minimaux**, dont la troisième classe de Chern est minimale (cf. [B]).

Il est naturel de se demander s'il y a une relation entre les courbes minimales et les faisceaux réflexifs minimaux (à décalage près), ce qui conduit à la question suivante :

Question I. Dans une classe de biliaison, la courbe minimale est-elle section d'un faisceau réflexif ?

La réponse est négative, comme on le voit facilement sur un contre-exemple (cf. [B]). Si M est un module de Koszul de type (n_1, n_2, n_3, n_4) , c'est-à-dire un quotient de R par une suite régulière (f_1, f_2, f_3, f_4) où f_i est de degré n_i avec $n_1 \leq n_2 < n_3 \leq n_4$, la courbe minimale associée au module $M \oplus M$ n'est pas une section d'un faisceau réflexif minimal.

Dans une classe de $\mathcal{P}si$, il n'y a pas toujours de fibré de rang 2. Lorsqu'il y en a, ce sont les éléments minimaux. Les schéma des zéros des sections de ces fibrés, lorsqu'ils sont de dimension 1, sont des courbes **sous-canoniques**. On peut alors poser la question suivante :

Question II. Si une classe de biliaison contient des courbes sous-canoniques, la courbe minimale est-elle aussi sous-canonique ?

Par exemple, dans la classe de biliaison associée à un module de Koszul de type (n_1, n_2, n_3, n_4) avec $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ et $n_1 + n_4 = n_2 + n_3$, la courbe minimale est sous-canonique.

Comme le montre A. Buraggina (cf. [B] 5), cette question est équivalente à la question suivante, qui nous a été posée par Hartshorne et Ellia :

Question III. *Soit \mathcal{E} un fibré de rang 2 sur \mathbf{P}^3 , n un entier relatif tel que $H^0\mathcal{E}(n-1) = 0$ et $H^0\mathcal{E}(n) \neq 0$, soit C une courbe schéma des zéros d'une section non nulle de $\mathcal{E}(n)$. Est-elle minimale dans sa classe de biliaison ?*

Dans cet article, nous donnons une réponse positive aux questions II et III (théorème 2.5).

Dans le premier paragraphe, nous étudions, pour toute courbe C tracée sur une surface Q , le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{I}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q)$ dont les sections globales sont liées aux biliaisons élémentaires que l'on peut faire à partir de la courbe (cf. 1.2) et à ses propriétés de minimalité. En particulier nous caractérisons les homomorphismes non nuls et non injectifs de $\mathcal{I}_{C/Q}$ dans $\mathcal{O}_Q(h)$ (cf. 1.8).

Le deuxième paragraphe est consacré à la preuve du résultat. La méthode est la suivante : si C est une courbe sous-canonique minimale pour un fibré pour laquelle on peut faire une biliaison élémentaire descendante, il existe un entier $n < 0$ et une section non nulle de $\mathcal{O}_C(n)$. L'étude de la courbe contenue dans C sur laquelle cette section s'annule conduit à une contradiction.

Notations. On désigne par k un corps algébriquement clos et par R l'anneau de polynômes $k[X, Y, Z, T]$. L'espace projectif \mathbf{P}_k^3 sera noté simplement \mathbf{P}^3 et son faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$. Si \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ -module nous noterons $h^i\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $H^i\mathcal{F}$, et $H_*^i\mathcal{F}$ le R -module gradué $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^i\mathcal{F}(n)$.

Une courbe C de \mathbf{P}^3 est un sous-schéma fermé purement de dimension 1, localement Cohen-Macaulay, défini par un faisceau d'idéaux \mathcal{I}_C . Son faisceau dualisant est le faisceau $\omega_C = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_P}^2(\mathcal{O}_C, \omega_P) = \mathcal{E}xt_P^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})(-4)$.

On note

$$e(C) = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\},$$

$$s_0(C) = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{I}_C(n) \neq 0\}.$$

Le module de Rao de C : $M_C = H_*^1\mathcal{I}_C$ est un R -module gradué de longueur finie qui joue un rôle important dans la classification des courbes gauches.

1. Etude du dual de l'idéal d'une courbe tracée sur une surface.

Dans tout ce paragraphe, on désignera par Q une surface de degré s , non nécessairement intègre, de \mathbf{P}^3 et par q son équation. Pour toute courbe C tracée sur Q , définie par un faisceau d'idéaux \mathcal{I}_C , on va étudier le faisceau de \mathcal{O}_Q -modules $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{I}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q)$. Les sections globales de ce faisceau sont liées aux propriétés de minimalité de la courbe, comme nous le rappelons ci-dessous.

Définition 1.1. *Une courbe C est minimale dans sa classe de biliaison si son module de Rao a le décalage minimum, c'est-à-dire si pour toute courbe C' de la classe de biliaison de C on a $M_{C'} \simeq M_C(-h)$ avec $h \geq 0$.*

Dans la description des classes de biliaison, on utilise l'opération de biliaison élémentaire, qui s'obtient en pratiquant deux liaisons successives, l'une des surfaces liantes étant commune aux deux liaisons. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.2. Soient C et C' deux courbes tracées sur Q et soit $h \in \mathbf{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) C' est obtenue à partir de C par une double liaison par des surfaces (Q, S) et (Q, S') avec $\deg S' - \deg S = h$.

2) Il existe un homomorphisme injectif $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ d'image $\mathcal{J}_{C'/Q}$.

On a alors $M_C \simeq M_{C'}(h)$.

On dit que C' est obtenue à partir de C par une **biliaison élémentaire de hauteur h sur Q** , ascendante (resp. descendante) si $h > 0$ (resp. $h < 0$).

Démonstration. Voir [MDP1] III.2.3.

Proposition 1.3. Le diagramme fondamental. Soient C une courbe tracée sur Q , $h \in \mathbf{Z}$ et $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme. On a un diagramme commutatif de suites exactes de \mathcal{O}_Q -modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{J}_{C/Q}(-h) & \rightarrow & j & \mathcal{O}_Q(-h) & \rightarrow & \mathcal{O}_C(-h) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & & \downarrow u^\vee & & \downarrow \theta & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_Q & \rightarrow & j^\vee & \text{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q) & \rightarrow & \omega_C(4-s) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où $j : \mathcal{J}_{C/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q$ est l'injection canonique.

Démonstration. Partant de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{C/Q} \rightarrow j\mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

on obtient la première ligne en la tensorisant par $\mathcal{O}_Q(-h)$ et la deuxième ligne en lui appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\cdot, \mathcal{O}_Q)$. En effet, on a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q) = 0$ et $\omega_C = \text{Ext}_{\mathcal{O}_Q}^1(\mathcal{O}_C, \omega_Q) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_Q}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q)(s-4)$.

L'égalité $u^\vee j = j^\vee u$, qui entraîne l'existence de θ , est une conséquence du lemme facile d'algèbre suivant :

Lemme 1.4. Soit A un anneau commutatif, J un idéal de A , j l'injection canonique de J dans A et u un homomorphisme A -linéaire de J dans A . Alors on a $u^\vee j = j^\vee u$.

Démonstration. Soient α et β deux éléments de J . On a :

$$u^\vee j(\alpha)(\beta) = j(\alpha)u(\beta) = \alpha u(\beta) = u(\alpha\beta), \quad j^\vee u(\alpha)(\beta) = u(\alpha)j(\beta) = \beta u(\alpha) = u(\alpha\beta).$$

Gardant les notations de 1.3, on en déduit les deux résultats suivants, qui seront utiles dans la suite :

Corollaire 1.5. Pour tout entier négatif h , on a un isomorphisme $\text{Hom}(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q(h)) \simeq H^0 \omega_C(4-s+h)$ qui à u associe θ .

Démonstration. Cela résulte de la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{O}_Q(h) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q(h)) \rightarrow H^0 \omega_C(4-s+h) \rightarrow 0$$

Corollaire 1.6. Soit C' une courbe contenue dans C . Alors u se prolonge à $\mathcal{J}_{C'/Q}(-h)$ si et seulement si θ se factorise à travers la projection $\mathcal{O}_C(-h) \rightarrow \mathcal{O}_{C'}(-h)$.

Démonstration. Soient $j' : \mathcal{J}_{C'/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q$ et $i : \mathcal{J}_{C/Q} \rightarrow \mathcal{J}_{C'/Q}$ les injections canoniques. Supposons que u se prolonge en $u' : \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \mathcal{J}_{C/Q}(-h) & \rightarrow & j & \mathcal{O}_Q(-h) & \rightarrow & \mathcal{O}_C(-h) & \rightarrow 0 \\
& & \downarrow i & & & \parallel & & \downarrow & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) & \rightarrow & j' & \mathcal{O}_Q(-h) & \rightarrow & \mathcal{O}_{C'}(-h) & \rightarrow 0 \\
& & \downarrow u' & & & \downarrow u'^\vee & & \downarrow \theta' & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{O}_Q & \rightarrow & j'^\vee & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C'/Q}, \mathcal{O}_Q) & \rightarrow & \omega_{C'}(4-s) & \rightarrow 0 \\
& & \parallel & & & \downarrow i^\vee & & \downarrow & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{O}_Q & \rightarrow & j^\vee & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q) & \rightarrow & \omega_C(4-s) & \rightarrow 0
\end{array}$$

L'égalité $i^\vee u'^\vee = u^\vee$ montre que la composée des trois flèches verticales de droite n'est autre que θ , qui se factorise comme annoncé.

Inversement, si θ se factorise à travers la projection $\mathcal{O}_C(-h) \rightarrow \mathcal{O}_{C'}(-h)$, le diagramme précédent dans lequel on supprime la troisième ligne nous donne l'existence de la flèche u' .

D'après 1.2, l'étude de la minimalité d'une courbe tracée sur Q est liée à l'existence d'homomorphismes **injectifs** (et non surjectifs) de $\mathcal{J}_{C/Q}$ dans $\mathcal{O}_Q(h)$ avec h négatif. D'après 1.5, l'existence d'homomorphismes **non nuls** de $\mathcal{J}_{C/Q}$ dans $\mathcal{O}_Q(h)$ est équivalente à l'existence de sections non nulles du faisceau $\omega_C(4-s+h)$, donc, puisqu'on a $H^0 \omega_C(4-s+h) = H^1 \mathcal{O}_C(s-4-h)$, à l'inégalité $h \geq s-4-e(C)$; il sera possible d'en obtenir avec $h < 0$ si et seulement si $s_0(C) \leq s < e(C) + 4$. Il faut ensuite étudier quels sont les homomorphismes non nuls et non injectifs, qui ne peuvent exister que si Q n'est pas intègre.

Remarque 1.7. Si Q n'est pas intègre, posons $q = q_1 q_2$ et soient Q_1 et Q_2 les surfaces correspondantes, s_1 et s_2 leurs degrés. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Q_i}(-s_j) \rightarrow \lambda_j \mathcal{O}_Q \rightarrow p_j \mathcal{O}_{Q_j} \rightarrow 0$$

où $\lambda_j p_i$ est égal à la multiplication par $q_j : \mathcal{O}_Q(-s_j) \rightarrow \mathcal{O}_Q$.

Proposition 1.8. Soient C une courbe tracée sur Q , $h \in \mathbf{Z}$, $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme non nul et θ la section de $\omega_C(4-s+h)$ qui lui correspond. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) u n'est pas injectif,
- ii) il existe une décomposition $q = q_1 q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants, telle que $q_1 u = 0$,
- iii) il existe une décomposition $q = q_1 q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants, telle que, avec les notations de la remarque 1.6, u se factorise par $\lambda_2 : \mathcal{O}_{Q_1}(-s_2) \rightarrow \mathcal{O}_Q$.

De plus, si $h < 0$, elles sont encore équivalentes à :

- iv) il existe une décomposition $q = q_1 q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants, telle que $q_1 \theta = 0$.

Démonstration. $i \Rightarrow ii$: si u n'est pas injectif, il en est de même de l'homomorphisme de modules : $I_C/(q)(-h) \rightarrow R/(q)$ associé, qu'on désignera encore par u . Soient g un élément

de I_C dont l'image \bar{g} est un élément non nul du noyau de u et q_1 le pgcd de q et g , de sorte qu'on a $q = q_1 q_2$ et $g = q_1 g'$, où q_2 et g' sont premiers entre eux. Puisque \bar{g} n'est pas nul, q_1 est un diviseur strict de q , et q_2 n'est pas une constante. Pour tout f dans I_C on a $gu(\bar{f}) = fu(\bar{g}) = 0$; on en déduit que si f' relève $u(\bar{f})$, $q = q_1 q_2$ divise $gf' = q_1 g' f'$, donc q_2 divise $g' f'$, q_2 divise f' , et q divise $q_1 f'$. On a donc montré que $q_1 u = 0$. Puisque u n'est pas nul, ceci prouve aussi que q_1 n'est pas une constante.

$ii \Leftrightarrow iii$: puisque λ_1 est injectif, $q_1 u = \lambda_1 p_2 u$ est nul si et seulement si $p_2 u$ est nul, ce qui équivaut au fait que u se factorise par λ_2 .

$iii \Rightarrow i$: un homomorphisme $\mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_{Q_1}(-s_2)$ ne peut pas être injectif, car le support schématique de $\mathcal{J}_{C/Q}$ contient strictement celui de \mathcal{O}_{Q_1} .

$iv \Rightarrow ii$ si $h < 0$: si $q_1 \theta = 0$, $q_1 u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_Q(s_1)$ se prolonge à $\mathcal{O}_Q(-h)$, autrement dit il existe $v : \mathcal{O}_Q(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q(s_1)$ tel qu'on ait $q_1 u = v j$. On a alors $p_2 v j = 0$, donc $p_2 v$ se factorise par la projection $\mathcal{O}_Q(-h) \rightarrow \mathcal{O}_C(-h)$ composée avec un homomorphisme $\mathcal{O}_C(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ qui est nul pour des raisons de profondeur. Alors v se factorise également par $\lambda_1 : \mathcal{O}_{Q_2} \rightarrow \mathcal{O}_Q(s_1)$, donc il existe $w : \mathcal{O}_Q(-h) \rightarrow \mathcal{O}_{Q_2}$ tel qu'on ait $v = \lambda_1 w$. Puisque h est négatif, w est nul d'où le résultat.

Remarques 1.9.

1) Si on ne suppose plus que u n'est pas nul, les conditions ii) iii) et iv) restent valables, à condition de supposer seulement que q_2 n'est pas constant, c'est-à-dire que q_1 est un diviseur strict de q .

2) Si $h < 0$ et si on a $q = q_1 q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants et si la surface Q_1 d'équation q_1 contient C , q_1 annule $H^0 \omega_C(4-s+h)$ donc il n'existe pas d'homomorphisme injectif $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$.

Corollaire 1.10. Soient C et C' deux courbes tracées sur Q telles que C' soit contenue dans C , $h \in \mathbf{Z}$. Soit $u' : \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ et $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ sa restriction. Alors

- 1) si u' n'est pas nul, il en est de même de u ;
- 2) si u est injectif, il en est de même de u' .

Démonstration. Si u est nul, u' se factorise par la projection $\mathcal{J}_{C'}(-h) \rightarrow \mathcal{J}_{C'/Q}(-h)$ composée avec un homomorphisme $\mathcal{J}_{C'/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ qui est nul pour des raisons de profondeur, d'où 1).

Si u' n'est pas injectif, d'après 1.7, il existe une décomposition $q = q_1 q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants, telle que $q_1 u' = 0$, mais alors on a aussi par restriction $q_1 u = 0$, donc u n'est pas injectif.

Corollaire 1.11. Soit C une courbe. On ne peut pas faire à partir de C de biliaison élémentaire de hauteur négative si et seulement si pour tout $s \geq s_0(C)$, pour tout $h < 0$, pour toute surface Q de degré s d'équation q contenant C , il existe un diviseur strict q_1 de q qui annule $H^0 \omega_C(4-s+h)$.

Démonstration. D'après 1.8, il suffit de voir que si toute section de $\omega_C(4-s+h)$ est annulée par un diviseur strict de q , il en existe un qui les annule toutes. Cela provient du fait que si un espace vectoriel est réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, il est égal à l'un d'entre eux.

Exemple 1.12. Considérons un module de Koszul, c'est-à-dire un module quotient de R par une suite régulière (f_1, f_2, f_3, f_4) où f_i est de degré n_i avec $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$. On pose $\mu = \sup(n_1 + n_4, n_2 + n_3)$. Toute courbe minimale associée a son idéal gradué engendré par des polynômes (rangés par degrés croissants) $ff_1^2, f_1f_2, gf_2^2, ff_1f_4 + gf_2f_3$, où f et g sont des polynômes homogènes de degrés respectifs $\mu - n_1 - n_4$ et $\mu - n_2 - n_3$, non nuls et tels que f, g , et les f_i soient deux à deux sans facteur commun (cf. [MDP1] IV 6).

On a $s_0(C) = \mu + n_1 - n_4$ et $e(C) = 2\mu - n_3 - n_4 - 4$. Les valeurs de s et h à considérer sont celles qui vérifient $s_0(C) \leq s \leq e(C) + 4 + h$, ou encore $\mu + n_1 - n_4 \leq s \leq 2\mu - n_3 - n_4 + h$. Quand il en existe (c'est-à-dire si on n'a pas à la fois $n_1 = n_2, n_3 = n_4$), les équations des surfaces Q correspondantes sont dans l'idéal (ff_1^2, f_1f_2) , donc sont toutes divisibles strictement par f_1 , et on vérifie que les sections de $\omega_C(4 - s + h)$ sont annulées par f_1 .

2. Minimalité des courbes sous-canoniques.

Définition 2.1. Une courbe est dite sous-canonique s'il existe un fibré \mathcal{E} de rang 2 sur \mathbf{P}^3 , un entier relatif n et une section non nulle de $\mathcal{E}(n)$ dont le schéma des zéros est C . On a alors $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(2n + c_1 - 4)$, où c_1 est la première classe de Chern de \mathcal{E} . Une telle courbe est dite minimale pour \mathcal{E} si $\mathcal{E}(n - 1)$ n'a pas de section globale non nulle.

Proposition 2.2. Soit C une courbe sous-canonique, et C' une courbe contenue dans C distincte de C . Alors il existe une courbe C'' contenue dans C et des isomorphismes : $\mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C \simeq \omega_{C''}(-\alpha)$, $\mathcal{I}_{C''}/\mathcal{I}_C \simeq \omega_{C'}(-\alpha)$ où α est l'entier qui vérifie $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(\alpha)$. De plus, $\mathcal{I}_{C''}$ (resp. $\mathcal{I}_{C'}$) est l'annulateur de $\mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C$ (resp. $\mathcal{I}_{C''}/\mathcal{I}_C$).

Démonstration. On considère la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow 0$ et on lui applique le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$. Le support de $\mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C$ étant de dimension 1, le faisceau $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$ est nul. On obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C'}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow 0$$

Sachant qu'on a des isomorphismes : $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C'}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \simeq \omega_{C'}(4)$, $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \simeq \omega_C(4) \simeq \mathcal{O}_C(\alpha + 4)$, on en déduit un isomorphisme : $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \simeq \mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4)$ où C'' est un sous-schéma fermé de C qui vérifie donc $\mathcal{I}_{C''}/\mathcal{I}_C \simeq \omega_{C'}(-\alpha)$.

D'autre part, en appliquant de nouveau le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$ à la suite exacte obtenue :

$$0 \rightarrow \omega_{C'}(4) \rightarrow \omega_C(4) \rightarrow \mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4) \rightarrow 0$$

et en tenant compte des isomorphismes canoniques $\mathcal{E}xt^2(\omega_C(4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \simeq \mathcal{O}_C$ et $\mathcal{E}xt^2(\omega_{C'}(4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \simeq \mathcal{O}_{C'}$ on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow \mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow 0$$

ce qui prouve que C'' n'est pas vide, que $\mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_{C''}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) = 0$, donc que C'' est une courbe (localement Cohen-Macaulay) et que $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4) \simeq \omega_{C''}(-\alpha) \simeq \mathcal{I}_{C'}/\mathcal{I}_C$.

La deuxième assertion résulte du fait que l'annulateur de $\omega_{C'}$ (resp. $\omega_{C''}$) n'est autre que $\mathcal{I}_{C'}$ (resp. $\mathcal{I}_{C''}$).

Corollaire 2.3. Soient C une courbe sous-canonique, Q une surface de degré s contenant C , h un entier, $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme non nul et θ la section de $\omega_C(4+h-s) = \mathcal{O}_C(\alpha+4+h-s)$ correspondante. Il existe deux courbes C' et C'' contenues dans C , une suite exacte $0 \rightarrow \omega_{C'}(-\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C''} \rightarrow 0$ telles que C'' soit la plus grande courbe (éventuellement vide) contenue dans le support du conoyau de θ , que $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$ soit le noyau de θ , que u se prolonge à $\mathcal{J}_{C'/Q}(-h)$ et que $\mathcal{J}_{C''}$ soit l'annulateur de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$.

Si $h < (s - \alpha - 4)$, C'' n'est pas vide.

Démonstration. L'image de $\theta : \mathcal{O}_C \rightarrow \omega_C(4+h-s) = \mathcal{O}_C(\alpha+4+h-s)$ est un quotient de \mathcal{O}_C , autrement dit θ peut se factoriser de la manière suivante : $\theta = \epsilon p$, où p est la projection de \mathcal{O}_C sur un quotient $\mathcal{O}_{C'}$ et ϵ est une injection $\mathcal{O}_{C'} \rightarrow \mathcal{O}_C(\alpha+4+h-s)$. Ceci entraîne en particulier que tous les associés de $\mathcal{O}_{C'}$ sont de dimension 1, donc que C' est une courbe (non vide car $\theta \neq 0$).

Le conoyau de θ est de la forme $\mathcal{O}_Z(\alpha+4+h-s)$ où Z est un sous-schéma fermé de C . Soit C'' la plus grande courbe contenue dans Z , qui est égale à Z en dehors d'un nombre fini de points. D'après 2.2, si C'' n'est pas vide, il existe une courbe C'_1 et une suite exacte $0 \rightarrow \omega_{C'_1}(-\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C''} \rightarrow 0$, et ϵ se factorise par une injection $\mathcal{O}_{C'} \rightarrow \omega_{C'_1}(4+h-s)$ qui est un isomorphisme en-dehors d'un nombre fini de points. On en déduit que C' et C'_1 sont égales.

Le fait que u se prolonge à $\mathcal{J}_{C'/Q}(-h)$ résulte de 1.6.

On vérifie que l'assertion est encore vraie (mais sans intérêt) si C'' est vide, ce qui correspond au cas où θ est injective.

Si $h < (s - \alpha - 4)$, $\alpha + 4 + h - s$ est strictement négatif donc θ n'est pas injective (sinon son conoyau serait de longueur finie et aurait une caractéristique de Hilbert strictement négative).

Proposition 2.4. Soient \mathcal{E} un fibré de rang 2 sur \mathbf{P}^3 , C une courbe sous-canonique minimale pour \mathcal{E} , Q une surface de degré s contenant C et h un entier négatif. On ne peut pas faire à partir de C de bilaison élémentaire de hauteur h sur Q .

Démonstration. Quitte à tensoriser \mathcal{E} par un faisceau inversible, on peut supposer qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

et qu'on a $H^0\mathcal{E}(a-1) = 0$, puisque C est minimale pour \mathcal{E} . Remarquons qu'on a aussi $H^0\mathcal{J}_C(a-1) = 0$, donc $s \geq a$ et $a+h-s$ est strictement négatif.

On a aussi $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(a-4)$.

Supposons qu'il existe un homomorphisme injectif $u_1 : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$. D'après 1.5 il correspond à un élément non nul θ_1 de $H^0\omega_C(4+h-s) = H^0\mathcal{O}_C(a+h-s)$.

Soit $n_0 = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid H^0\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}$. D'après ce qui précède, on a $n_0 \leq a+h-s < 0$ et $s-a+n_0 \leq h < 0$.

Soit θ_2 un élément non nul de $H^0\mathcal{O}_C(n_0) = H^0\omega_C(4-a+n_0)$ qui correspond d'après 1.5 à un homomorphisme non nul $u_2 : \mathcal{J}_{C/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q(s-a+n_0)$.

Pour $i \in \{1, 2\}$ soient C'_i et C''_i les courbes associées à θ_i comme on les a construites en 2.3. Alors $\theta_i = \epsilon_i p_i$, où p_i est la projection de \mathcal{O}_C sur un quotient $\mathcal{O}_{C'_i}$ et ϵ_1 (resp. ϵ_2)

est une injection de $\mathcal{O}_{C'_1}$ dans $\mathcal{O}_C(a+h-s)$ (resp. de $\mathcal{O}_{C'_2}$ dans $\mathcal{O}_C(n_0)$) et u_i se prolonge à $\mathcal{J}_{C'_i/Q}$. De plus, $\mathcal{J}_{C''_i}$ est l'annulateur de $\mathcal{J}_{C'_i}/\mathcal{J}_C$.

Le produit $\theta_2\theta_1$ est une section de $\mathcal{O}_C(a+h-s+n_0)$ et il est nul par définition de n_0 . On a donc $\epsilon_2 p_2 \epsilon_1 p_1 = 0$ (en fait il faudrait plutôt l'écrire $\epsilon_2 p_2 \epsilon_1(-n_0)p_1(-n_0) = 0$, mais on omettra les décalages), et $p_2 \epsilon_1 = 0$ puisque p_1 est surjectif et ϵ_2 injectif. On en déduit que C'_2 est contenu dans le support du conoyau de ϵ_1 , qui est aussi le conoyau de θ_1 , donc dans la plus grande courbe contenue dans ce support, c'est-à-dire C''_1 . On a donc des inclusions $\mathcal{J}_C \subseteq \mathcal{J}_{C''_1} \subseteq \mathcal{J}_{C'_2}$, et puisque u_2 se prolonge à $\mathcal{J}_{C'_2/Q}$, il se prolonge également à $\mathcal{J}_{C''_1/Q}$.

D'après 1.10, puisque u_1 est injectif, il en est de même de son prolongement à $\mathcal{J}_{C'_1/Q}$. On définit ainsi une biliaison élémentaire descendante, de hauteur h sur Q , qui associe Γ à C et Γ'_1 à C'_1 . On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{J}_{C/Q}(-h) & \rightarrow & \mathcal{J}_{C'_1/Q}(-h) & \rightarrow & \mathcal{J}_{C'_1}/\mathcal{J}_C(-h) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{J}_{\Gamma/Q} & \rightarrow & \mathcal{J}_{\Gamma'_1/Q} & \rightarrow & \mathcal{J}_{\Gamma'_1}/\mathcal{J}_{\Gamma} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont des isomorphismes induits par u_1 . On en déduit que $\mathcal{J}_{\Gamma'_1}/\mathcal{J}_{\Gamma}$ est isomorphe à $\mathcal{J}_{C'_1}/\mathcal{J}_C(-h)$ donc que l'annulateur de $\mathcal{J}_{\Gamma'_1}/\mathcal{J}_{\Gamma}$ est égal à $\mathcal{J}_{C''_1}$. Cet annulateur contient évidemment \mathcal{J}_{Γ} , donc \mathcal{J}_{Γ} est contenu dans $\mathcal{J}_{C''_1}$.

D'autre part, u_2 se prolonge en un homomorphisme non nul $\mathcal{J}_{C''_1/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q(s-a+n_0)$. Par composition, on obtient un homomorphisme non nul (cf. 1.9) :

$$\mathcal{J}_{C/Q}(-h) \simeq \mathcal{J}_{\Gamma/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q(s-a+n_0)$$

donc par 1.5 un élément non nul de $H^0\mathcal{O}_C(n_0+h)$ ce qui donne une contradiction.

Théorème 2.5. *Soit C une courbe sous-canonique minimale pour un fibré \mathcal{E} de rang 2 sur \mathbf{P}^3 . Alors C est minimale dans sa classe de biliaison.*

Démonstration. Soit $H_{\gamma,M}$ le schéma de Hilbert des courbes à cohomologie et module de Rao constants contenant C , qui est irréductible (cf. [MDP1] V et VI). Nous aurons besoin des résultats des deux lemmes suivants :

Lemme 2.6. *L'ensemble des courbes sous-canoniques de $H_{\gamma,M}$, minimales pour un fibré, est un ouvert.*

Démonstration. On a un isomorphisme $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(\alpha)$. Une courbe C' de $H_{\gamma,M}$ est sous-canonique si et seulement si il existe un entier α' et un isomorphisme $\omega_{C'} \simeq \mathcal{O}_{C'}(\alpha')$. Mais puisque C et C' ont même cohomologie, on a alors $\alpha = \alpha'$. L'isomorphisme $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(\alpha)$ correspond à une section de $\omega_C(-\alpha)$ qui se prolonge sur un voisinage U de C dans $H_{\gamma,M}$ (cf. [MDP1] VII 2.3 et 2.5). Pour toute courbe C' de U , il existe un homomorphisme injectif (quitte à restreindre U) $\mathcal{O}_{C'} \rightarrow \omega_{C'}(-\alpha)$ qui est un isomorphisme car les deux faisceaux ont même polynôme de Hilbert.

Soit C' une courbe sous-canonique de $H_{\gamma,M}$. On voit facilement que C' est minimale pour le fibré auquel elle correspond si et seulement si $H^0\mathcal{J}_{C'}(\alpha+3)$ est nul et l'ensemble des courbes C' de $H_{\gamma,M}$ vérifiant $H^0\mathcal{J}_{C'}(\alpha+3) = 0$ est soit vide, soit égal à $H_{\gamma,M}$.

Lemme 2.7. *L'ensemble des courbes de $H_{\gamma,M}$ pour lesquelles on peut faire une biliaison (s, h) est un ouvert.*

Démonstration. C'est une conséquence de [MDP1] VII 4.7.

Fin de la démonstration du Théorème 2.5. Si C n'est pas minimale dans sa classe de biliaison, il existe un entier $m \geq 1$, une suite de courbes C_0, C_1, \dots, C_m telle que C_{i+1} s'obtienne à partir de C_i par une biliaison élémentaire de hauteur strictement positive, et C à partir de C_m par une déformation à cohomologie et module de Rao constants (cf [MDP1] IV 5). Soit s le degré de la surface sur laquelle on fait la biliaison élémentaire qui fait passer de C_{m-1} à C_m et $-h$ sa hauteur. L'ouvert des courbes de $H_{\gamma,M}$ pour lesquelles on peut faire une biliaison (s, h) est donc non vide. Puisque $H_{\gamma,M}$ est irréductible, cet ouvert rencontre l'ouvert des courbes sous-canoniques minimales pour un fibré, et la proposition 2.4 donne une contradiction.

Références bibliographiques.

[BBM] Ballico E., Bolondi G. Migliore J., The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of \mathbf{P}^n . Amer. J. Math. 113, 117–128 (1991).

[B] Buraggin A., Biliaison classes of reflexive sheaves, Math. Nachr. 201, 53–76, 1999.

[Ho] Horrocks G., Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. Lond. Math. Soc., 14, 689–713 (1964).

[HMDP] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches, Journal of Pure and Applied Algebra 155, 53–76 (2001).

[MDP1] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Sur la classification des courbes gauches I, Astérisque, Vol. 184–185, 1990.

[MDP2] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Quand un morphisme de fibrés dégénère-t-il le long d'une courbe lisse ? Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series/200. Marcel Dekker, Inc. july 1998.

[Mi] Migliore J., Geometric Invariants of Liaison, J. Algebra 99, 548–572 (1986).

[R] Rao A. P., Liaison among curves in \mathbf{P}^3 , Invent. Math., Vol. 50, 205–217 (1979).